第二节 积分基本定理

一、单连通域的柯西定理

从上一讲的例子可知,复积分$\int_C \bar{z}dz$,沿不同路径而起点终点相同的曲线C的积分值是不同的;

$\int_C zdz$沿不同路径,起点终点相同的曲线C的积分值是相同的。

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

问题：复积分的积分值与路径无关，或沿封闭曲线的积分值为零的条件是什么？

定理　(柯西－－古萨基本定理)

如果函数$f(z)$在单连通域B内处处解析,那么

函数$f(z)$沿B内任一条封闭曲线C的积分为零：

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

说明：

1、这个定理对于复变函数的研究与发展起着非常重要的作用。它是复变函数理论的基础，因此将此定理称为积分基本定理。

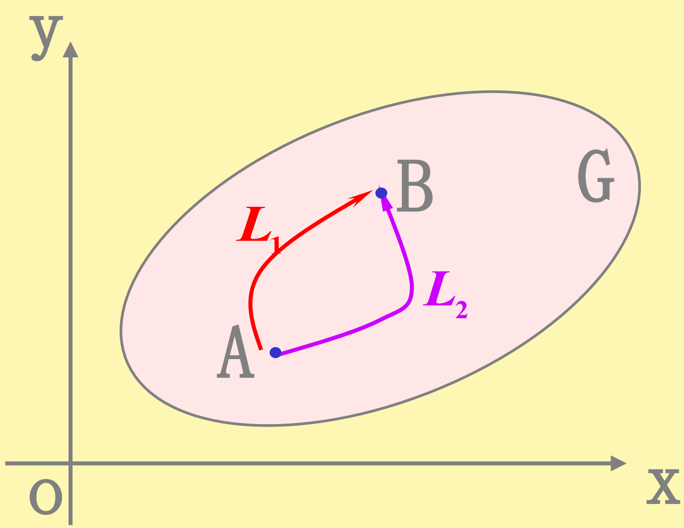
2、定理中的条件是$f(z)$在单连通区域D内处处解析，此条件比积分定义中被积函数连续要强得多。

如果函数$f(z)$在单连通域B内处处解析，那么函数$f(z)$在B内任一条封闭曲线C的积分为零.

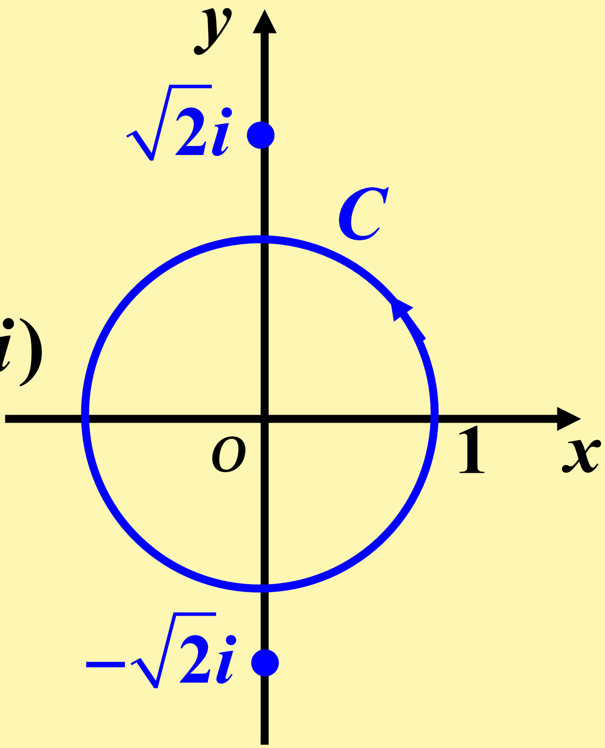
3、对B中起点为z_1和终点为z_2的曲线C_1和C_2，

$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$，仅与起点和终点有关，

记为$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$.



例　计算 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{1}{z^2+2}dz$



$$z^2+2=z^2-2i^2=(z+\sqrt{2}i)(z-\sqrt{2}i)$$

$\dfrac{1}{z^2+2}$除$z=\pm\sqrt{2}i$外处处解析

$\because f(z)=\dfrac{1}{z^2+2}$在曲线$C:|z|=1$所围的区域$D$内

处处解析,

由柯西--古萨基本定理: $\therefore \oint\limits_{|z|=1}\dfrac{1}{z^2+2}dz=0$

二、多连通域的柯西定理

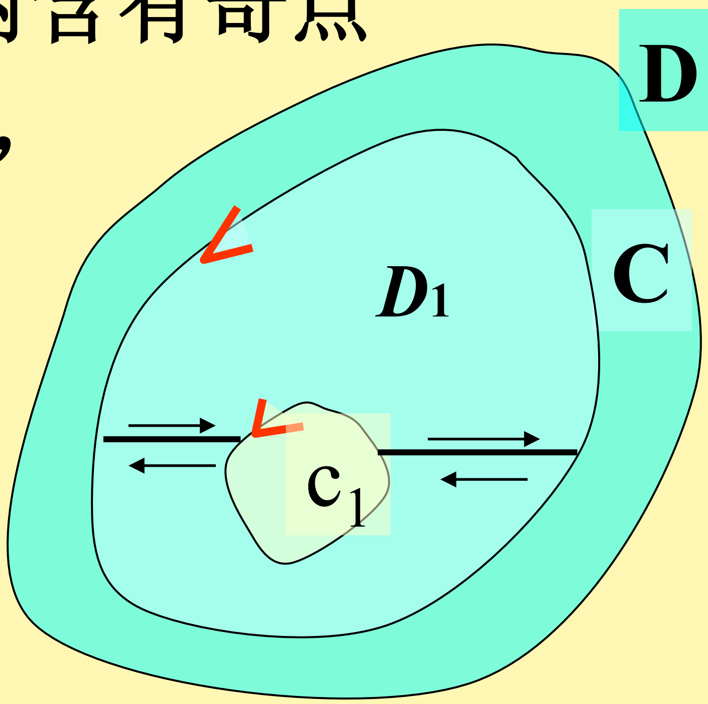
如果$f(z)$在曲线C的内部不完全解析时，不一定有$\oint_C f(z)dz=0$ 如：$\oint_{|z-z_0|=r}\dfrac{dz}{z-z_0}=2\pi i\neq 0$

若$f(z)$在正向简单闭曲线C内含有奇点

取C内的正向简单闭曲线C_1，

$f(z)$在由C和C_1^-为边界的区域D_1内解析，在闭区域$\overline{D_1}$上连续，则

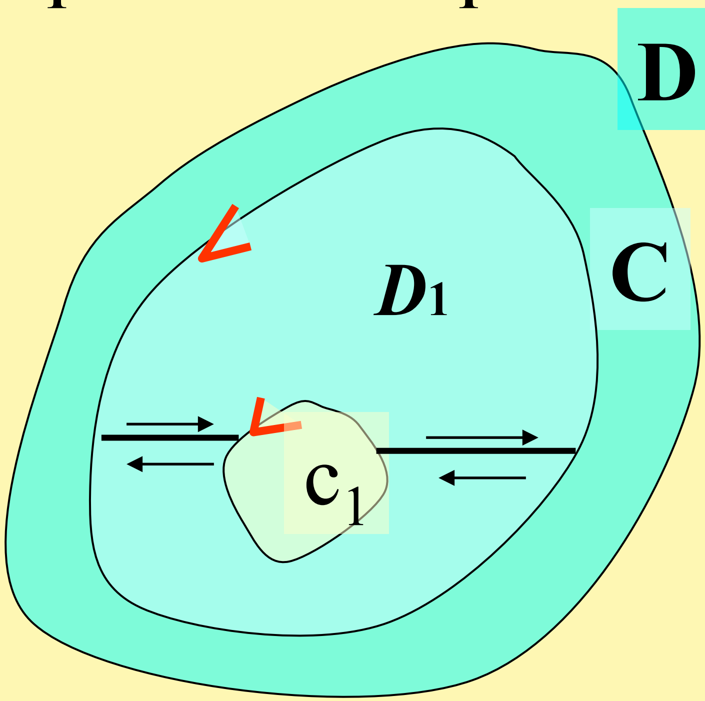
$$\oint_{C+C_1^-} f(z)dz=0$$



二、多连通域的柯西定理

$f(z)$在区域D_1内解析，$C+C_1^-$是区域D_1的正向边界曲线，

$$\oint_{C+C_1^-} f(z)dz=0$$



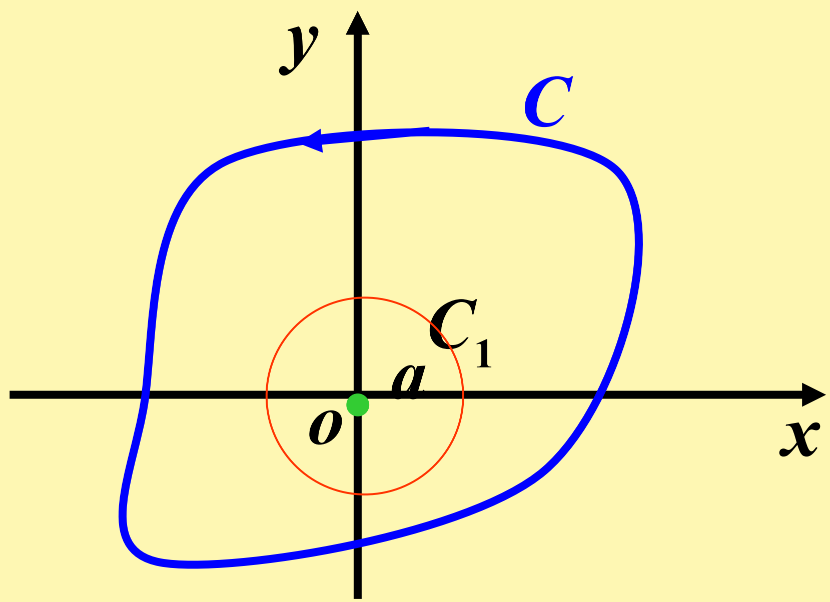
$$\Rightarrow \oint_{C} f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)dz$$

闭路变形原理：在区域内的一个解析函数沿闭曲线的积分，不因曲线在区域内作**连续变形**而改变它的值，只要在变形过程中曲线**不经过$f(z)$不解析的点**。

例 计算$\oint_C \frac{1}{z}dz$(其中C是含原点的任意正向闭曲线)

解：由于$f(z)=\frac{1}{z}$在曲线C所围的区域D内有一个奇点$z=0$,不能直接用柯西－－古萨基本定理。

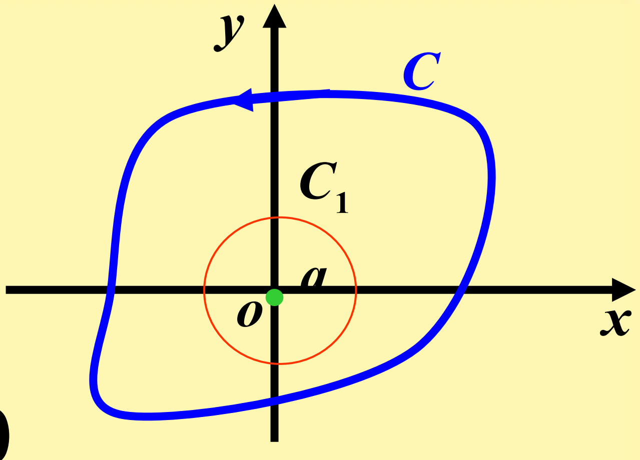
以原点为中心,作一个圆$C_1:|z|=a$,取逆时针使得曲线C_1与曲线C所围成的区域D_1内无奇点,



即$f(z)=\frac{1}{z}$在D_1(多连通域)内处处解析。

根据闭路变形原理

$$\therefore \oint_C \frac{1}{z}dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z}dz = \oint_{|z|=a} \frac{1}{z}dz = 2\pi i$$



$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

仿照本例的方法, 我们有:

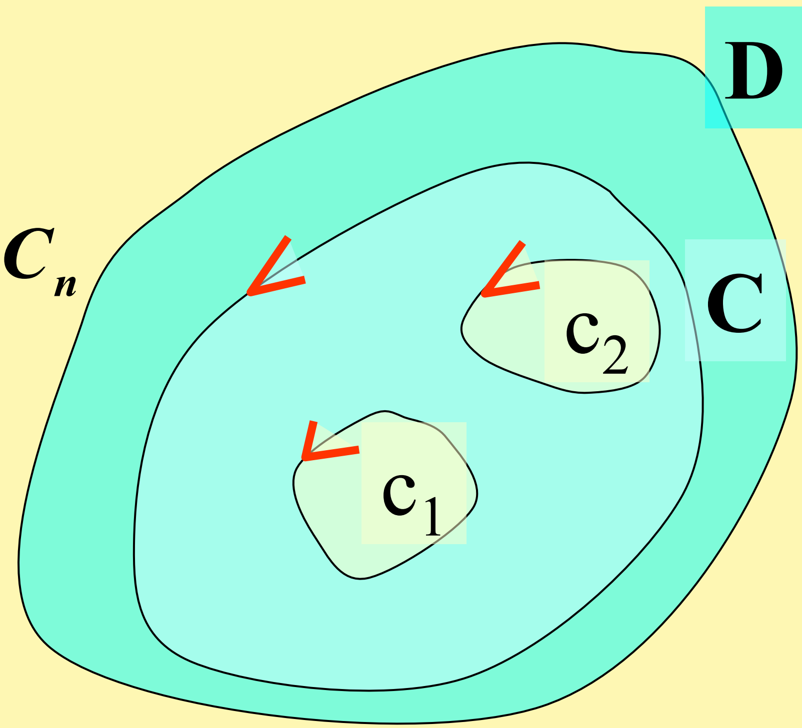
$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n\neq 1 (n\in Z) \end{cases}$$

其中C是任何一条包含z_0的简单闭曲线。

二、多连通域的柯西定理

定理 (复合闭路定理)

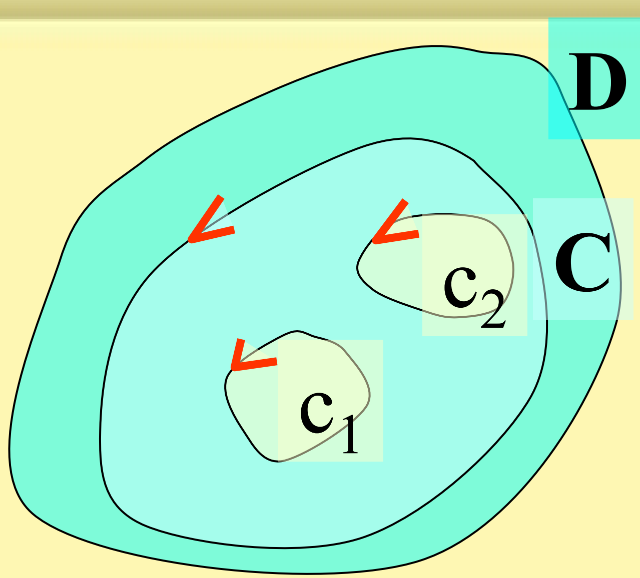
设C为多连通域D内的一条简单闭曲线，$C_1, C_2, \cdots, C_n$是在C内的简单闭曲线,它们互不包含也互不相交,并且以$C, C_1, C_2, \cdots, C_n$为边界的区域全含于D。



记 $L = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$

如果$f(z)$在D内解析,那么: $\oint_L f(z)dz = 0$

二、多连通域的柯西定理



定理 (复合闭路定理)

$$L = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$$

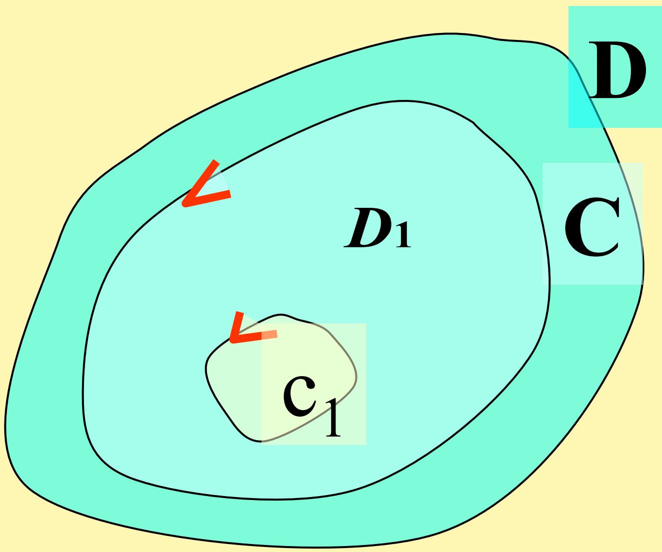
$$\oint_L f(z)dz = 0$$

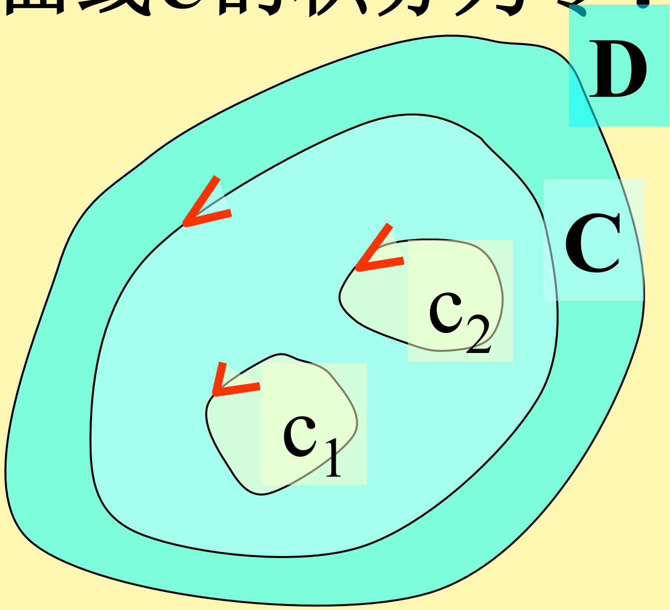
$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1+C_2+\cdots+C_n} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)dz$$

应用：若$f(z)$在曲线C所围的区域内含有n个奇点，可做互不相交互不包含的曲线$C_1, C_2, \cdots C_n$，使它们各含一个奇点, 再用柯西积分公式求复积分

定理　(柯西－－古萨基本定理)　$\oint_C f(z)dz = 0$

如果函数$f(z)$在单连通域B内处处解析,那么函数$f(z)$沿B内任一条封闭曲线C的积分为零:





闭路变形原理　　　　复合闭路定理

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz \qquad \oint_C f(z)dz = \oint_{C_1+C_2} f(z)dz$$

三、原函数与不定积分

由柯西基本定理知：设 $f(z)$在单连通区域 B内解析，则对B中任意曲线C,积分$\int_C f(z)dz$与路径无关，只与起点和终点有关，即 $\int_C f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$

令$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$　　单值函数

定理

若函数$f(z)$在单连通域B内处处解析,那么函数

$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$必为$B$内的解析函数,且$F'(z) = f(z)$。

设$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$,则$F'(z)=f(z)$

定义1 如果函数$\phi(z)$在区域B内的导数等于$f(z)$,即$\phi'(z)=f(z)$,那么称函数$\phi(z)$为$f(z)$在区域B内的原函数。

注意: (1)函数$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$是$f(z)$的一个原函数

(2) $f(z)$的任何两个原函数相差一个常数。

(3)如果函数$f(z)$在区域B内有一个原函数$F(z)$,那么它就有无穷多个原函数,而且具有一般表达式$F(z)+C$。

定义2 $f(z)$的原函数的一般表达式$F(z)+C$(其中C为任意常数)为$f(z)$的不定积分,记作

$$\int f(z)dz = F(z)+C$$

定理 如果函数$f(z)$在单连通域B内处处解析,$G(z)$为$f(z)$的一个原函数,那么

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = G(z_1)-G(z_0)$$

这里z_0, z_1为域B内的两点。

有了原函数、不定积分和解析函数的积分公式，复变函数的积分也可以用与微积分学中类似的方法计算。

例　计算 $\int_{\overline{AB}}(z+2)e^{z}dz$，其中 $\overline{AB}$ 是 $A: z=-1$ 到点 $B: z=i$ 的有向直线段。

解　$\because f(z)=(z+2)e^{z}$ 在全平面上解析，$\therefore$ 可用牛顿－－莱布尼兹公式

$$\int_{\overline{AB}}(z+2)e^{z}dz=\int_{-1}^{i}(z+2)e^{z}dz$$

$$=(2e^{z}+ze^{z}-e^{z})\Big|_{-1}^{i}=(e^{z}+ze^{z})\Big|_{-1}^{i}$$

$$=(i+1)e^{i}-(-1+1)e^{-1}=(i+1)e^{i}$$

计算$\int_{\overline{AB}}(z+2)e^z dz$,其中$\overline{AB}$是$A:z=-1$到点$B:z=i$的有向直线段。

第二种方法:参数法

解 直线$\overline{AB}: y=x+1 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t+1 \end{cases}$ 或 $\dfrac{i-z}{i+1}=t$

$$\Rightarrow z=t+(t+1)i \quad (t\text{从}-1\text{到}0)$$

$$\int_{\overline{AB}}(z+2)e^z dz=\int_{-1}^{0}[t+(t+1)i+2]e^{t+(t+1)i}(1+i)dt$$

$$=(i+1)e^i$$

总结求复积分的方法:

$$1\text{、}C\text{为开路径}\begin{cases}(i)\text{牛顿-莱布尼兹公式}\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - f(z_1) \\ (ii)\text{参数法}\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt,\text{直线、折线、圆弧等。}\end{cases}$$

$$2\text{、}C\text{为闭路径}\begin{cases}(i)f(z)\text{在}C\text{所围成的单连通域内解析, 由基本定理} \\ \oint_C f(z)dz = 0 \\ (ii)f(z)\text{在}C\text{所围成的区域内有奇点，则挖洞后用} \\ \text{复合闭路定理}\oint_C f(z)dz = \sum \oint_{C_i} f(z)dz \\ (iii)\oint_C \dfrac{1}{(z-z_0)^n}dz = \begin{cases}2\pi i, n=1 \\ 0, n \neq 1\end{cases}\end{cases}$$